

Mi: 1ère année; Résumé d'Algèbre.

## Chap 0: Un peu de logique.

### I. Proposition (pp) logique:

• Une pp est un énoncé dont on peut dire s'il est vrai/faux.  
ex:  $2^3 = 18$  pp (v.v=0) /  $x \in \mathbb{N}$  pp.

- Calcul propositionnel: Soient  $p, q$  2 pp données.

- la Négation:  $\bar{p}$  ex  $\sqrt{2} \geq 15$ ,  $\bar{p}$ :  $\sqrt{2} < 15$ .

- des connecteurs logiques:

1. Conjonction: -  $p$  et  $q$ , on note  $p \wedge q$ .

-  $p \wedge q$  est vraie ssi  $p, q$  sont vraies simultanément.

2. Disjonction: -  $p$  ou  $q$ , on note  $p \vee q$ .

-  $p \vee q$  est fautive ssi  $p, q$  sont fautes simultanément.

3. d'implication: - si  $p$ ... alors...  $q$ ..., on note  $p \Rightarrow q$ .

-  $p \Rightarrow q = \bar{p} \vee q$

-  $p \Rightarrow q$  est fautive ssi  $p$  est vrai et  $q$  est fautive.

4. d'équivalence: -  $p \Leftrightarrow q$  ( $p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow p$ ).

- Tableau de vérité: (vraie = 1, fautive = 0).

$p$	$q$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1





# Chap I: Ensembles - Relations - Applications:

## 1. Ensembles

### \* Relations entre ensembles:

1. Inclusion: E est inclus dans F si tous les éléments de E sont dans F.

mathématiquement:  $E \subset F \equiv (\forall x : x \in E \rightarrow x \in F)$

- propriétés:  $\emptyset \subset E / E \subset E / E \subset F \wedge F \subset G \Rightarrow E \subset G$ .

2. Egalité: E est égal à F si  $E \subset F \wedge F \subset E$ .

math.  $(E = F) \equiv (E \subset F \wedge F \subset E) \equiv (\forall x : x \in E \Leftrightarrow x \in F)$

### \* Opération sur les ensembles:

① Intersection "∩":  $A \cap B$  est l'ensemble des éléments communs.

math:  $A \cap B = \{x / x \in A \wedge x \in B\}$

Rem: si  $A \cap B = \emptyset$ , on dit que A et B sont disjoints.

② Réunion "∪": A union B est l'ens =  $\{x / x \in A \vee x \in B\}$ .

#### propriétés de ∩ et ∪:

- $A \cup A = A / A \cap A = A$
- $A \cup B = B \cup A / A \cap B = B \cap A$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup \emptyset = A$
- $A \cap \emptyset = \emptyset$
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

③ Différence:  $A - B$  ( $A/B$ ) =  $\{x / x \in A \wedge x \notin B\}$

pptés:  $A - \emptyset = A / \emptyset - A = \emptyset / A - A = \emptyset \neq \emptyset / (A - B \neq B - A)$ .

④ Différence symétrique:  $\Delta$ : delta

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$$

[www.exosup.com](http://www.exosup.com)

[www.exomaroc.com](http://www.exomaroc.com): MIHAD

### \* Ensemble des parties d'un ensemble:

- A est une partie de E si  $A \subset E$ .

- l'ens des parties de E est:  $\mathcal{P}(E) = \{A / A \subset E\}$  (toutes les parties de E)

$$\begin{cases} E \in \mathcal{P}(E) \checkmark \\ E \subset \mathcal{P}(E) \times \end{cases}$$

### \* Complémentaire d'une partie:

En ens, A une partie de E, On appelle Compl de A dans E l'ens:

$$C_E A = \{x / x \in E \wedge x \notin A\} \equiv E - A \quad (x \in C_E A \Leftrightarrow x \notin A)$$

propriétés: E: ens; A, B: des parties de E:

•  $C_E \emptyset = E / C_E E = \emptyset / C_E (C_E A) = A$ .

•  $A \cap C_E A = \emptyset / A \cup C_E A = E$ .

### \* Règles de Morgan:

$$C_E (A \cup B) = C_E A \cap C_E B$$

$$C_E (A \cap B) = C_E A \cup C_E B$$

### \* Produit Cartésien:

$$E \times F = \{(a, b) / a \in E \wedge b \in F\}$$

*Couple ordonné* (a 1<sup>ère</sup> composante du couple, b 2<sup>ème</sup> comp)

-  $E \times F \neq F \times E$  / On note  $E \times E$  par  $E^2$ .

-  $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n = \prod_{k=1}^n E_k / \underbrace{E \times E \times \dots \times E}_{n \text{ fois}} = E^n$

- Cas général!!

[www.exosup.com](http://www.exosup.com)

[www.exomaroc.com](http://www.exomaroc.com): MIHAD



## 2- Relations

\* Une relation entre  $E, F$  (ensembles) est une règle qui permet d'associer aux elts de  $E$  des elts de  $F$ .




On l'écrit:  $a R b$ :  $a$  est en rel avec  $b$ .

\* Graphe d'une rel:

$$G_R = \{(a, b) \in E \times F / a R b\}$$

\* Relations binaire. (Propriétés):  $a R b$

C'est une rel définie entre les elts de même ens.

reflexive	symétrique	transitive	antisymétrique
$\forall a \in E$ : $a R a$	$\forall a, b \in E$ : $a R b \Leftrightarrow b R a$	$\forall a, b, c \in E$ : $a R b \wedge b R c \Rightarrow a R c$	$\forall a, b \in E$ : $a R b \wedge b R a \Rightarrow a = b$
			

• Relation d'équivalence:

$R$  est une rel d'équivalence si elle est: refl + sym + trans.

- classe d'équivalence:

C'est l'ens:  $\bar{a} = \{x \in E / x R a\}$ .

• Relation d'ordre:

$R$  est une rel d'ordre si elle est: refl + trans + antisym.

- On dit que l'ordre est total si:  $\forall a, b \in E: a R b \vee b R a$

et il est partiel si:  $\exists a, b \in E: a R b \wedge b R a$ .

### 3. Applications:

\* On appelle application de E vers F, toute rel qui permet d'associer à chaque elts de E un seul elts de F.

\* Egalité de deux app:  $f = g$  si  $E = E' \wedge F = F' ; \forall x: f(x) = g(x)$

\* Image directe d'une partie A:  $f(A)$  "ent"

$f: E \rightarrow F$  (une appl) /  $A \subset E$ ;

$$f(A) = \{ \underset{\text{images}}{f(x)} / x \in A \}; f(A) \subset F$$

\* Image réciproque de B:  $f^{-1}(B)$

$f: E \rightarrow F$  /  $B \subset F$

$$f^{-1}(B) = \{ \underset{\text{antécédents}}{x \in E} / f(x) \in B \}; f^{-1}(B) \subset E$$

\* la Composition des applications:

$f: E \rightarrow F$ ;  $g: F \rightarrow G$

la composée de f et g est:  $h(x) = g(f(x)) = g \circ f(x)$ :

(f compose g).

\* Propriétés d'une app:

• injective:  $\forall a, b \in E: f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$ .

la négation:  $\exists a, b \in E: f(a) = f(b) \wedge a \neq b$ .

• surjective:  $\forall y \in F: \exists x \in E: y = f(x)$  ...  $\forall y \in F \exists x \in E$

• Notion de Bijection:  $f$  bij  $\Leftrightarrow f$  inj +  $f$  surj

www.exomaroc.com: MIHAD

www.exosup.com